



Kan en over 2000 år gammel metode gi gode mål for jordens omkrets?

Forfatter: Martin Kjøllesdal Johnsrud, Bø Videregående Skule

Det er i dag mulig å gjøre ekstremt nøyaktige målinger av jordas omkrets ved hjelp av satellittdata og annen moderne teknologi. I denne oppgaven brukes en over 2000 år gammel metode for å måle jordomkretsen, antatt først tatt i bruk av grekeren Eratostenes. Her brukes mål av skyggen sola kaster på sitt høyeste for å regne ut hvor høyt sola står. Mål fra to forskjellige steder, samt lengde mellom stedene brukes så til å regne ut jordas omkrets. Resultatene fra forsøket gir et avvik på 6,5 % av den faktiske jordomkretsen, og viser at denne metoden kan gi et relativt godt overslag over jordas omkrets, og metoden kan med all formodning gi enda bedre resultat med flere målinger, over lengre tid, og flere steder.

INNLEDNING

Det er en allmenn misoppfatning at inntil Columbus satte seil for India men endte opp i Amerika, trodde alle at verden var flat. Det er ikke sant. Allerede i antikken var det kjent at verden var rund. I Hellas, rundt 400 f.v.t. skjedde det en ganske monumental endring i måten man oppfattet verden rundt seg. Istedenfor å basere kunnskapen sin rundt mytologi og guders handlinger, begynte man å tro at det finnes visse regler naturen følger slavisk. De baserte hypotesen sin på at jorda er rund på troen på at kula er en perfekt form og forekommer mye i naturen, samt empiriske observasjoner av måneformørkelse og stjernenes relative posisjon forskjellige steder på jorden, og skip som forsvinner over horisonten. Grekeren Eratostenes fant en måte å måle jordens omkrets. Han brukte to obelisker plassert i byene Syene og Alexandria, og kunnskapen om lengden mellom dem. Med dette skal han ha fått et resultat som var innenfor 7 % av den faktiske distansen. (Renstrøm, 2016)

HYPOTESE

I dette forsøket skal jeg gjenskape det Eratostenes gjorde, og sammenligne resultatet med målinger gjort med moderne teknologi. Grunnet at metere var originalt definert som $1/10\ 000\ 000$ av distansen fra Nordpolen til ekvator, er jordas meridionale omkrets (omkretsen gjennom polene) nesten nøyaktig $4 \cdot 1.00 \cdot 10^7$ m, altså 40 000 km. Det er dette målet jeg sikter på å treffe med forsøket mitt. Hypotesen dette forsøket går inn for å prøve ut er at **det er mulig å beregne jordas meridionale omkrets innenfor en rimelig usikkerhet ved hjelp av Eratostenes over 2000 år gamle metode som bruker solskyggens vinkel på to forskjellige steder.**

UTSTYRSLISTE

Det skal kun gjøres 3 målinger i dette forsøket, og det brukes ett apparat for å gjøre disse målingene. Apparatet er veldig enkelt, og består av to planker som står vinkelrett på hverandre. Den horisontale planken kaster en skygge på den vannrette planken. Et vater brukes for å sørge for at planken ligger vannrett, noe som er viktig for å gode målinger. Et kompass brukes for å se når sola står rett sør, og et målebånd for å måle lengden av skyggen, l , og høyden av planken som kaster skyggen, h . I tillegg blir skyggen veldig svak når den blir «dratt» utover en vannrett flate, så jeg bruker et hvitt ark for å kunne se skyggen bedre.



Skyggemålingsapparatet i bruk



Bruk av et hvitt papir for å lese av skyggens lengde

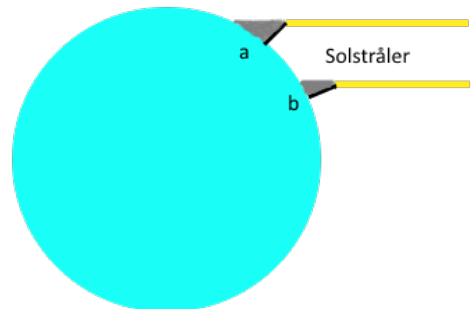
Eratostenes skal etter sigene ha brukt marsjerende soldater til å måle avstanden mellom de to stedene hvor måla ble tatt. Dette er ikke noe vi har tilgang på. Isteden brukes Google maps for å finne to punkter som er på ca. samme lengdegrad, og for å måle lengden mellom dem. Funksjonen «mål avstand» i Google maps brukes for å finne lengden D_m .

METODE

For å gjøre dette forsøket, må det gjøres to antakelser:

1. Solstrålene som kommer inn mot jorda er helt parallelle.
2. Jorda er en perfekt kule.

Den første er ganske uproblematisk, da solas radius er mindre enn 5 promille av avstanden fra sola til jorda, noe som gjør lysstrålene som når jorda så godt som parallelle. Den andre antakelsen kan komme til å virke inn på resultatene. Det at jorda roterer rundt sin egen akse gjør at den trykkes inn ved polene, og dras ut rundt ekvator. Men dette forsøket gjøres på rundt 60° nord, altså ikke så langt fra midten mellom ekvator og polene, de to ekstremene. Her vil jordas kurvatur være tilnærmet lik en kule. Når man aksepterer disse antakelsene, kan man begynne å gjøre målinger. I dette forsøket brukes anretningen til å måle lengden til solskyggen på to forskjellige steder nøyaktig



Figur 1

ved solar middag, når sola står høyest, og rett i sør. (Se fig. 1.) Den første målingen ved punkt a gjøres ved Sandamoen i Bø, som ligger 8.903° øst. Den andre målingen, ved punkt b , gjøres i Tvedestrand, som ligger 8.917° øst.¹ Jeg regner derfor luftlinjen mellom Bø og Tvedestrand som lik den meridionale avstanden (D_m) mellom dem, dvs. avstanden kun i nord-sør retningen.

Grunnet at målingene gjøres så langt nord, oppstår det et nytt problem: solas høyde midt på dagen varierer fra dag til dag. Siden disse målingene gjøres mens dagene blir kortere, og først lengst nord, så sør, vil resultatene vise jorda som større enn den faktisk er. For å motvirke dette, gjøres målingene først ved punkt a , b dagen etter, og til slutt en ny måling ved punkt a den tredje dagen. Ved så å ta gjennomsnittet av målingene fra punkt a , l_{a1} og l_{a2} , får man en ny verdi, \bar{l}_a , som er nærmere den faktiske målinga samme dagen målingene ved punkt b ble gjort. Verdien vil da kun bli påvirket av endringens endring, altså den andrederiverte. Snittet (\bar{l}_a) regnes ut slik:

$$\bar{l}_a = \frac{l_{a1} + l_{a2}}{2}$$

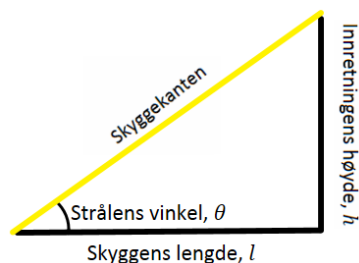
For å regne ut vinkelen solstrålene kommer inn med, må det brukes trigonometri. Målene som brukes er høyden på den delen av apparates som kaster skyggen, h , og lengden av skyggen, l (se fig. 2). Følgene formel brukes til å regne ut solstrålens vinkel, θ :

$$\theta = \tan^{-1} \frac{h}{l}$$

Vinklene for punkt a og b finner man slik:

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{h}{l_a}$$

$$\theta_b = \tan^{-1} \frac{h}{l_b}$$



Figur 2

Differansen mellom vinklene, θ_{diff} , beregnes slik slik:

$$\theta_{diff} = \theta_b - \theta_a$$

Forholdet mellom θ_{diff} og en full sirkel, 360° , vil da være det samme som forholdet mellom den meridionale avstanden mellom punkt a og b , D_m , og jordas meridionale omkrets, O_m . Uttrykket for O_m blir slik:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{diff}}{360^\circ} &= \frac{D_m}{O_m} \\ \Downarrow \\ O_m &= \frac{D_m}{\left(\frac{\theta_{diff}}{360^\circ}\right)} \\ \Downarrow \\ O_m &= \frac{D_m * 360^\circ}{\theta_{diff}} \end{aligned}$$

¹ Breddegrader hentet fra Google maps

Det fulle uttrykket for O_m blir da:

$$O_m = \frac{D_m * 360^\circ}{\tan^{-1}\left(\frac{h}{l_b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2 * h}{l_{a1} + l_{a2}}\right)}$$

FREM GANGSMÅTE

- Dag 1; 30.11.16:

Målingen gjøres på Sandamoen, Bø i Telemark, koordinater (59.416° N, 8.903° Ø). Målingen ble gjort klokka 12:13, når sola sto rett sør, og loggført.

- Dag 2; 01.12.16

Målingen blir gjort rett nord for Tvedestrand, på parkeringsplassen utenfor Grisen Storsenter, koordinater (58.629° N, 8.917° Ø). Målingen ble gjort klokka 12:14, når sola sto rett sør, og loggført

- Dag 3; 02.12.16

Målingen ble igjen gjort på Sandamoen klokka 12:14, når sola sto rett sør, og ble loggført.

RESULTATER

Dette ble resultatene fra målingene:

D_m	87.55 km
h	24.7 cm
l_{a1}	160 cm
l_b	147 cm
l_{a2}	163 cm

Når disse målingene blir satt inn i formelen får man dette resultatet:

$$O_m = \frac{87.55 \text{ km} * 360^\circ}{\tan^{-1}\left(\frac{24.7 \text{ cm}}{147 \text{ cm}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2 * 24.7 \text{ cm}}{160 \text{ cm} + 163 \text{ cm}}\right)} = 3.74 * 10^4 \text{ km}$$

Resultatet er altså 37 400 km, som er 40 000 km - 37 400 km = 2 600 km mindre enn den faktiske distansen, altså en bom på $100\% - \left(\frac{37\,400 \text{ km}}{40\,000 \text{ km}} * 100\%\right) = 6.5\%$.

DISKUSJON

Forsøket har etter forholdene gitt relativt gode resultater. Vi ser i neste del om feilkilder at det er en hel del ting som kan ha påvirket resultatene, men det ser ut til at det er mulig å oppnå rimelige resultater for jordens meridionale omkrets, tatt i betraktning den primitive teknologien som er brukt. Det er forsøket støtter også opp om at det var mulig for grekeren Eratostenes å gjøre disse forsøkene, kanskje til og med få bedre resultater, i og med at han etter sigene brukte bautasteiner som kan være flere meter høye, og at han hadde solen rett over hodet på et av målestedene hans, og dermed hadde en skarpere skygge.

FEILKILDER

Disse målingene ble gjort under ganske dårlige forhold, og det er ganske mange feilkilder som kan påvirke resultat. Som tidligere nevnt er noen feilkilder jordas uregelmessige krumming, samt variasjonen i solas høyeste punkt fra dag til dag. Forskjellig høyde over havet på de to punktene målingene ble tatt kan også være en faktor, men forskjellen er bare noen få meter, og antakeligvis ubetydelig i forhold til de 87,55 km mellom dem. Det at målingene ble gjort sent på året og langt nord, gjør at sola er veldig lav. Dette gjør det vanskelig å gjøre målinger, da skyggen blir svak og får diffuse kanter. Feil i avlesning, ikke helt rette vinkler på apparatet samt at apparatet ikke er plassert helt vannrett kan også ha innvirkning på resultatene.

Det er også flere grep som kunne vært gjort for å få bedre målinger. Et større måleapparat vil gjøre at én cm feilmåling av skyggen får mye mindre utslag på resultatene. Hvis målingene hadde blitt gjort om sommeren ville det antakelig vært lettere og gjøre avlesning. Midtsommers hadde vært best, siden jo nærmere en kommer sommersolverv, jo mindre endrer solas toppunkt seg fra dag til dag, noe som gjør målingene mer korrekte.

Men den aller viktigste en kunne gjort for å øke treffsikkerheten til resultatene er å gjøre flere målinger, og målinger på flere forskjellige steder. Målingene hver for seg kommer til å ha utslag i begge retninger, men med flere datapunkter vil «de store talls lov» slå inn, og snittet av alle målingen vil med all sannsynlighet nærme seg det korrekte resultatet. (Aven, 2015)

KONKLUSJON

Resultatet fra dette forsøket viser at man med relativ stor sikkerhet kan påstå at det er mulig å få et godt anslag av jordomkretsen med Eratostenes metode. Målingen i dette forsøket bommet med 6,5 %, som ville vært katastrofalt med moderne metoder, men som er et ganske godt anslag for en metode fra oldtiden.

REFERANSER

- Store Talls Lov. (2017, 17. januar). I Store norske leksikon. Hentet 1. mars 2017 fra https://snl.no/store_talls_lov
- Renstrøm, R. (2016). *Den klassiske mekanikkens historie*. Universitetet i Agder.